

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1

Тема: Формулы логики. Построение таблиц истинности.

Цель: Научиться определять значения логических функций и отработать приёмы составление таблиц истинности сложных функций.

Теория

Логической (булевой) функцией $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется функция, которая может принимать только два значения: логический 0 и логическая 1.

Высказывание – это повествовательное предложение, в отношении содержания которого можно сказать истинно оно или ложно. Простые высказывания соединяются с помощью логических операций.

Любая логическая функция может быть задана с помощью таблицы истинности, в левой части которой записываются наборы аргументов, а в правой – соответствующее значение функции.

Таблица истинности булевых функций двух переменных

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Пример: Составьте таблицу истинности для высказывания $\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}$

x_1	x_2	$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	$\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	0	0	0

Формы отображения логических операций

Вид логической операции	Наименование формы																		
	Символическая	Буквенная	Аналитическая	Таблица истинности															
Дизъюнкция	$\vee; +$	«ИЛИ»	$f = x_1 \vee x_2$	<table><tr><td>x_1</td><td>x_2</td><td>f</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	x_1	x_2	f	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
x_1	x_2	f																	
0	0	0																	
0	1	1																	
1	0	1																	
1	1	1																	
Конъюнкция	$\wedge; \bullet$	«И»	$f = x_1 \wedge x_2$	<table><tr><td>x_1</td><td>x_2</td><td>f</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	x_1	x_2	f	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1
x_1	x_2	f																	
0	0	0																	
0	1	0																	
1	0	0																	
1	1	1																	
Инверсия	$\overline{X}$	«НЕ»	$f = \overline{X}$	<table><tr><td>x</td><td>f</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr></table>	x	f	0	1	1	0									
x	f																		
0	1																		
1	0																		
Импликация	$\rightarrow$	-	$f = x_1 \rightarrow x_2$	<table><tr><td>x_1</td><td>x_2</td><td>f</td></tr></table>	x_1	x_2	f												
x_1	x_2	f																	

				0	0	1
				0	1	1
				1	0	0
				1	1	1
Эквивалентность	$\leftrightarrow$	-	$f = x_1 \leftrightarrow x_2$	x_1	x_2	f
				0	0	1
				0	1	0
				1	0	0
				1	1	1
Сумма по модулю	$\oplus$	Исключающее «ИЛИ»	$f = x_1 \oplus x_2$	x_1	x_2	f
				0	0	0
				0	1	1
				1	0	1
				1	1	0
Запрет	Δ	-	$f = x_1 \Delta x_2$	x_1	x_2	f
				0	0	0
				0	1	0
				1	0	1
				1	1	0
Штрих Шеффера		«И-НЕ»	$f = x_1 x_2$	x_1	x_2	f
				0	0	1
				0	1	1
				1	0	1
				1	1	0
Стрелка Пирса	$\downarrow$	«ИЛИ-НЕ»	$f = x_1 \downarrow x_2$	x_1	x_2	f
				0	0	1
				0	1	0
				1	0	0
				1	1	0

Алгоритм построения таблиц истинности для сложных выражений:

1. Определить количество строк:
количество строк = 2^n + строка для заголовка,
 n - количество простых высказываний.
2. Определить количество столбцов:
количество столбцов = количество переменных + количество логических операций;
 - о определить количество переменных (простых выражений);
 - о определить количество логических операций и последовательность их выполнения.
3. Заполнить столбцы результатами выполнения логических операций в обозначенной последовательности с учетом таблиц истинности основных логических операций.

Пример: Составить таблицу истинности логического выражения:

$$D = \neg A \& (B \vee C).$$

Решение:

1. Определить количество строк: на входе три простых высказывания: **A , B , C** поэтому $n=3$ и количество строк = $2^3 + 1 = 9$.
2. Определить количество столбцов:
 - о простые выражения (переменные): **A , B , C** ;
 - о промежуточные результаты (логические операции):
 $\neg A$ -инверсия (обозначим через **E**);
 $B \vee C$ - операция дизъюнкции (обозначим через **F**);
а также искомое окончательное значение арифметического выражения:
 $D = \neg A \& (B \vee C)$. т.е. **$D = E \& F$** - это операция конъюнкции.

3. Заполнить столбцы с учетом таблиц истинности логических операций.

A	B	C	E	F	E & F
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0

Построение логической функции по ее таблице истинности:

Попробуем решить обратную задачу. Пусть дана таблица истинности для некоторой логической функции $Z(X,Y)$:

X	Y	Z
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Составить логическую функцию для заданной таблицы истинности.

Правила построения логической функции по ее таблице истинности:

1. Выделить в таблице истинности те строки, в которых значение функции равно **1**.
2. Выписать искомую формулу в виде дизъюнкции нескольких логических элементов. Число этих элементов равно числу выделенных строк.
3. Каждый логический элемент в этой дизъюнкции записать в виде конъюнкции аргументов функции.
4. Если значение какого-либо аргумента функции в соответствующей строке таблицы равно **0**, то этот аргумент взять с отрицанием.

Решение.

1. В первой и третьей строках таблицы истинности значение функции равно **1**.
2. Так как строки две, получаем **дизъюнкцию** двух элементов: $() \vee ()$.
3. Каждый логический элемент в этой дизъюнкции запишем в виде **конъюнкции** аргументов функции X и Y : $(X \& Y) \vee (X \& Y)$.
4. Берем аргумент с отрицанием если его значение в соответствующей строке таблицы равно **0** и получаем искомую функцию:
 $Z(X, Y) = (\neg X \& \neg Y) \vee (X \& \neg Y)$.

Практические задания

Цель работы: овладеть навыками записи таблицы истинности для заданных логических выражений.

Задание:

Выполните задание согласно варианту.

1 вариант.

1. Решить булево уравнение:

$$(\bar{z} \oplus x) \vee (\bar{z} | (y \vee \bar{x})) = x \wedge (y \oplus z)$$

2. Доказать с помощью таблицы истинности закон де Моргана

$$\overline{x \wedge y} \equiv \bar{x} \vee \bar{y};$$

$$\overline{x \vee y} \equiv \bar{x} \wedge \bar{y}$$

3. Даны два высказывания: A = «Число 5 – простое»; B = «Луна – спутник Венеры».

Сформулируйте следующие высказывания: $A \wedge B$

2 вариант.

1. Решить булево уравнение:

$$(\bar{z} \vee y) \rightarrow (\bar{z} \oplus \bar{x}) = x \wedge y$$

2. Доказать с помощью таблицы истинности Коммутативные законы:

$$x \wedge y \equiv y \wedge x;$$

$$x \vee y \equiv y \vee x;$$

3. Даны два высказывания: A = «Число 5 – простое»; B = «Луна – спутник Венеры».

Сформулируйте следующие высказывания: $A \vee B$

3 вариант.

1. Решить булево уравнение:

$$(\bar{z} \Rightarrow y) \Leftrightarrow (\bar{z} \vee \bar{x}) = x \oplus y$$

2. Доказать с помощью таблицы истинности Ассоциативные законы:

$$x \wedge (y \wedge z) \equiv (x \wedge y) \wedge z;$$

$$x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z;$$

3. Даны два высказывания: A = «Число 5 – простое»; B = «Луна – спутник Венеры».

Сформулируйте следующие высказывания: $A \rightarrow B$

4 вариант.

1. Решить булево уравнение:

$$(\bar{z} \vee y) \wedge (\bar{z} \oplus \bar{x}) = x \Rightarrow y$$

2. Доказать с помощью таблицы истинности Дистрибутивные законы:

$$x \wedge (y \vee z) \equiv (x \wedge y) \vee (x \wedge z);$$

$$x \vee (y \wedge z) \equiv (x \vee y) \wedge (x \vee z);$$

3. Даны два высказывания: A = «Число 5 – простое»; B = «Луна – спутник Венеры».

Сформулируйте следующие высказывания: $A \leftrightarrow B$

5 вариант

1. Решить булево уравнение:

$$(\bar{z} \vee y) \oplus (\bar{z} \oplus \bar{x}) = x | y$$

2. Доказать с помощью таблицы истинности Идемпотентные законы:

$$x \wedge x \equiv x;$$

$$x \vee x \equiv x;$$

3. Даны два высказывания: A = «Число 5 – простое»; B = «Луна – спутник Венеры».

Сформулируйте следующие высказывания: $A \oplus B$

6 вариант

1. Решить булево уравнение:

$$(\bar{z} \vee y) \rightarrow (\bar{z} | (y \vee \bar{x})) = x \wedge y$$

2. Доказать с помощью таблицы истинности Законы логического сложения и умножения с 0 и 1:

$$x \wedge 0 \equiv 0;$$

$$x \vee 0 \equiv x;$$

$$x \wedge 1 \equiv x;$$

$$x \vee 1 \equiv 1;$$

3. Даны два высказывания: A = «Число 5 – простое»; B = «Луна – спутник Венеры».

Сформулируйте следующие высказывания: $A \downarrow B$

7 вариант.

1. Решить булево уравнение:

$$(\bar{z} \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow (\bar{z} | (y \oplus \bar{x})) = z \wedge y$$

2. Доказать с помощью таблицы истинности Законы операции «черта»:

$$\overline{\bar{x}} \equiv x;$$

$$x \vee 0 \equiv x;$$

$$x \vee 1 \equiv 1;$$

$$\bar{\bar{x}} \wedge x \equiv 0;$$

$$\bar{\bar{x}} \vee x \equiv 1;$$

3. Даны два высказывания: A = «Число 5 – простое»; B = «Луна – спутник Венеры».

Сформулируйте следующие высказывания: $A | B$

8 вариант.

1. Решить булево уравнение:

$$(\bar{z} \vee x) \Leftrightarrow (\bar{z} | (y \vee \bar{x})) = y$$

2. Доказать с помощью таблицы истинности Законы Де Моргана:

$$\overline{x \wedge y} \equiv \bar{x} \vee \bar{y};$$

$$\overline{x \vee y} \equiv \bar{x} \wedge \bar{y}.$$

3. Даны два высказывания: A = «Число 5 – простое»; B = «Луна – спутник Венеры».

Сформулируйте следующие высказывания: $\bar{A}$

9 вариант.

1. Решить булево уравнение:

$$(x \vee \bar{y}) \rightarrow (\overline{z \leftrightarrow \bar{x}}) = 1$$

2. Доказать с помощью таблицы истинности $x \rightarrow y \equiv \bar{x} \vee y$;

3. Даны два высказывания: A = «Число 5 – простое»; B = «Луна – спутник Венеры».

Сформулируйте следующие высказывания: $A \wedge B$

10 вариант.

1. Решить булево уравнение:

$$((A \vee B) \oplus \bar{B}) \Rightarrow A = 0$$

2. Доказать с помощью таблицы истинности $\overline{x \wedge y} \equiv \bar{x} \vee \bar{y}$;
3. Даны два высказывания: $A = \text{«Число 5 – простое»}$; $B = \text{«Луна – спутник Венеры»}$.
Сформулируйте следующие высказывания: $A \vee B$

Контрольные вопросы:

1. Что такое высказывание?
2. Основные логические операции?
3. Что такое таблица истинности?
4. Правила заполнения таблицы истинности.
5. Таблицы истинности логических операций.